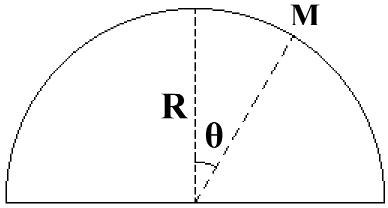
جامعة قسنطينة السنة الجامعية 2009/2008

السلسلة رقم 03 : تحريك النقطة المادية

- التمرين 01 : جسم كتلته **m** يتحرك على مستوي أفقي بحيث ينطلق بسرعة ابتدائية $\vec{V_0}$. بعد قطع مسافة **d** يتوقف الجسم عن الحركة، أستنتج قيمة معامل الاحتكاك **f**، و زمن توقف الجسم .

- التمرين 02 : جسم كتلته **m** موجود عند قمة نصف كرة من الجليد نصف قطرها **R** ، ينزلق دون احتكاك و دون سرعة ابتدائية



1- حدد مجموع القوى التي تؤثر في الجسم، ثم أحسب قوة رد الفعل عند النقطة **M** بدلالة الزاوية **θ** ، **g** و **m**.

2- أوجد الزاوية التي يغادر بها الجسم الكرة و السرعة التي اكتسبها.

- التمرين 03 : كتلة **m** تحت تأثير قوتين : $\vec{F_1} = a.\,Sin(\omega t).\vec{i}$ و $\vec{F_2} = b.\,Cos(\omega t).\vec{j}$

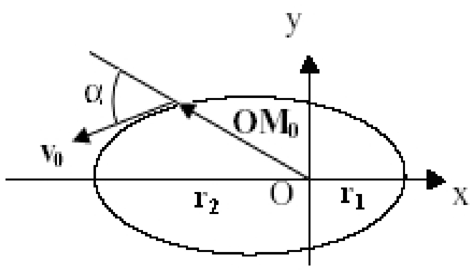
حيث **a** و **b** ثابتان موجبان، في اللحظة الابتدائية **t = 0** توجد الكتلة عند النقطة **M_0 (0 , y_0)** و يملك سرعة $\vec{V_0} = V_0.\vec{i}$ مع ($V_0=-a/m\omega$, $y_0=-b/m\omega^2$)

1- أوجد عبارة التسارع

2- أوجد عبارة السرعة

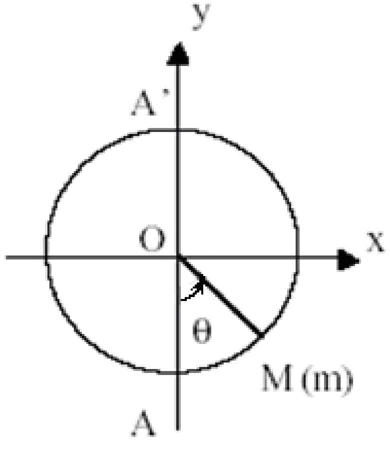
3- أوجد معادلة المسار

- التمرين 04: بين أن في حالة نقطة مادية خاضعة لتأثير قوة مركزية وكان مسارها دائريا، فإن حركتها تكون دائرية منتظمة.



- التمرين 05: نقطة مادية تحت تأثير قوة مركزية مركزها **O** ، تسلك مسارا إهليجيا. عند النقطة **M_0**، شعاع موقعها هو**OM_0** و سرعتها **v_0** مع الزاوية(α = (**OM_0 , v_0**) . القيم الحدية لـ **OM_0** هي**r_1** و **r_2** مع **$r_2 > r_1$**. أحسب قيمة السرعة في هاتين النقطتين بدلالة معطيات التمرين

- التمرين 06: نقطة مادية **M** كتلتها **m** مربوطة بالمركز **O** بواسطة خيط غير قابل للتمدد و مهمل الكتلة، تتحرك على مسار دائري شاقولي نصف قطره **r** .

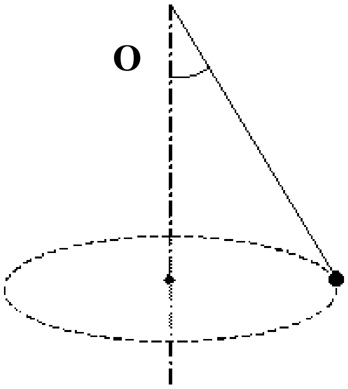


1- أحسب شدة توتر الخيط عند النقطتين **A** و **A'** بدلالة **v_A, r, m** , **v_A'** و **g** ، هل القيم موجبة

2- أكتب المعادلة الأساسية للتحريك ، ثم استنتج المعادلة التفاضلية للزاوية θ التي يصنعها **OM** مع الشاقول(لأجل مكاملة المعادلة نضرب طرفيها بالمقدار (d θ/dt) ثم استنتج السرعة عند اللحظة **t**، مع العلم أن السرعة الابتدائية (**θ = 0**) هي **v_0** (نكتب **v^2** بدلالة **v_0 , g , r, θ**).أحسب عند ذلك شدة توتر الخيط

3- لنعتبر θ_v قيمة الزاوية التي تكون من أجلها السرعة معدومة، و θ_T القيمة التي يكون من أجلها التوتر معدوما، أستخرج عبارة كل من **cos θ_v** و **cos θ_T** بدلالة نفس المعطيات ثم أرسمها بدلالة**v_0** و استنتج طبيعة الحركة حسب قيمة **v_0**

- <u>التمرين 07</u>: نعتبر نقطة مادية معلقة في طرف خيط طوله **L** و طرفه الآخر ثابت عند النقطة **O** .
نفترض أن النقطة المادية تقوم بحركة دائرية منتظمة بسرعة زاوية ω_1 .



1- أوجد العلاقة بين ω_1 و **L** ، **g** ، **Cosα** . أحسب توتر الخيط
2- بين أن الحركة تكون ممكنة إذا كانت $\omega_1 \geq \omega_0$، عين هذه القيمة
3- أحسب كمية الحركة $\vec{P} = m.\vec{V}$ و العزم الحركي $\vec{L}$، ثم عزم محصلة القوى بالنسبة للنقطة **O**. تحقق من نظرية العزم الحركي
4- نفترض أن النقطة المادية تتحرك هذه المرة على السطح الجانبي لمخروط نصف زاوية رأسه **α**، بسرعة زاوية ثابتة ω_2 حيث $\omega_2 < \omega_1$ و أن الحركة تتم دون احتكاك، ما هي قيمة رد فعل المخروط على النقطة المادية، ماذا يحدث في حالة $\omega_2 > \omega_1$.

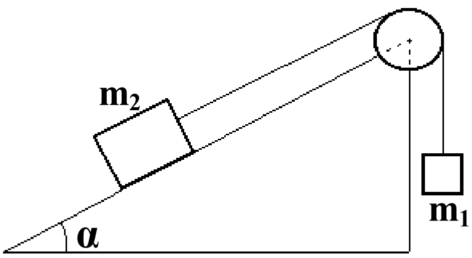
- <u>التمرين 08</u>: **<u>(المنزل)</u>** جسم كتلته **m** ، يسقط شاقوليا بدون سرعة ابتدائية ، تحت تأثير الثقل ، يخضع إلى قوة مقاومة الهواء و التي تتبع القانون : $\vec{R} = K.m.\vec{V}$ ، حيث **K** ثابت موجب.
1- أكتب القانون الأساسي للتحريك في هذه الحالة
2- أستخرج المعادلة التفاضلية التي تحدد قانون تغير السرعة مع الزمن
3- ماذا يحدث لو قذفت الكتلة بسرعة $\vec{V_0}$ نحو الأسفل.
4- عين في الحالتين قيمة السرعة الحدية.

- <u>التمرين 09</u>: **<u>(المنزل)</u>** جسيم كتلته **m** و شحنته **q** موضوع داخل وسط حيث ينتشر حقل كهربائي من الشكل : $\vec{E} = E_0.\vec{j}$ حيث E_0 ثابت موجب، في البداية يوجد الجسيم عند مركز الإحداثيات و يملك سرعة $\vec{V_0}$ تصنع زاوية **α** مع المحور **Ox**. نفترض بأن الوسط الذي ينتقل فيه الجسيم يؤثر فيه بقوة احتكاك لزج من الشكل: $\vec{F_f} = -K.\vec{V}$ حيث $\vec{V}$ هي سرعة الجسيم. يمكننا إهمال الثقل أمام القوى الأخرى
1- أكتب العلاقة الأساسية للتحريك
2- أستخرج المعادلة التفاضلية للسرعة الجسيم ثم بين أن السرعة تكتب من الشكل :

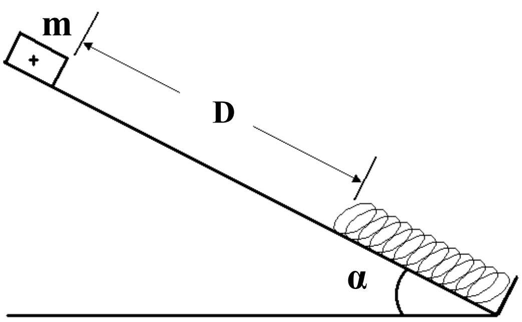
$$V_x = a.e^{-\beta t} \quad \text{و} \quad V_y = c.e^{-\beta t} + d \quad \text{أحسب} \quad a , \beta , c , d$$

3- أستنتج $x(t)$, $y(t)$ ، إلى أي قيم حدية تنتهي هاتين الدالتين لما $t\to\infty$. ما هو شكل المسار.

- <u>التمرين 10</u>: **<u>(المنزل)</u>** جملة مشكلة من كتلتين m_1 و m_2 مرتبطتان بواسطة خيط غير قابل للتمدد يعبر عبر بكرة عديمة الكتلة حسب الشكل.



1- حدد مجموع القوى التي تؤثر في m_1 وفي m_2
2- أستخرج عبارة تسارع الكتلتين بدلالة m_1 ، m_2 ، **α** و **g** .
3- أدرس بدلالة m_1 و m_2 طبيعة و اتجاه الحركة، حدد التوازن
4- نريد أن يكون التسارع $\gamma = 1/10.\,g$ ، ما هي نسبة الكتلتين بدلالة الزاوية **α**.



- <u>التمرين 11</u>: **<u>(المنزل)</u>** جسم كتلته **m = 10Kg** ينزلق على مستوي مائل زاويته **α** و معامل احتكاكه **f = 0.1**
1- ما هي أصغر زاوية α_{min} يبدأ الجسم الحركة معها
2- نأخذ زاوية $\alpha = 30° > \alpha_{min}$:
أ- أكتب القانون الأساسي للتحريك، و استخرج عبارة التسارع
ب- إذا كانت سرعة الجسم الابتدائية معدومة، ما قيمة سرعته

بعد أن يقطع مسافة **$D = 10m$**.

ت- عند هذه المسافة يصطدم الجسم بنابض ثابت مرونته **$K = 200N/m$** ، فيتقلص لمسافة **ΔX**، أوجد قيمة الانكماش العظمى

ث- يرتد الجسم نحو الأعلى لمسافة **D'**، أحسب هذه المسافة (نأخذ **$g = 10m/S^2$**).

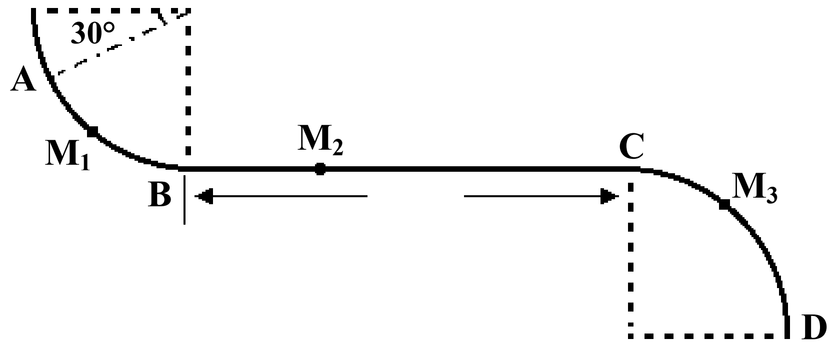
- <u>التمرين 12</u>: <u>(المنزل)</u> جسم كتلته **m** ينزلق على سطح موجه مشكل من ثلاثة أجزاء : **AB** جزء من دائرة نصف قطرها **R** ، و **BC** جزء مستقيم أفقي طوله **2R** ، و **CD** ربع آخر من دائرة لها نفس نصف القطر. ينزلق الجسم بدون احتكاك على الجزئين **AB** و **CD** و على الجزء **BC** باحتكاك معامله **f**.

نترك الجسم عند النقطة **$A\ (\theta = 30°\ ,\ t = 0)$** بدون سرعة ابتدائية أوجد:

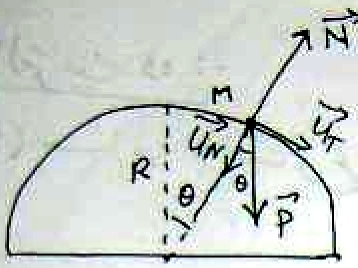
1- السرعة و رد الفعل عند نقطة كيفية **M_1** من الجزء **AB** ، ثم استنتج السرعة عند النقطة **B**.

2- السرعة و رد الفعل عند نقطة كيفية **M_2** من الجزء **BC** ، أحسب السرعة عند النقطة **C**

3- السرعة و رد الفعل عند نقطة كيفية **M_3** من الجزء **CD** ، أوجد الزاوية التي يغادر بها الجسم هذا السطح.



(1)



- حل التمرين 02: 1) القوى المؤثرة هي الثقل $\vec{P}$ و رد الفعل الناظمي $\vec{N}$ (بدون احتكاك)

قانون نيوتن يكتب

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{\gamma}$$

نستعمل الإحداثيات الذاتية $(\vec{U_N}, \vec{U_T})$.

$$(1) \quad P\cos\theta - N = m\gamma_N = m\frac{V^2}{R}$$

$$(2) \quad P\sin\theta = m\gamma_T = m\frac{dV}{dt}.$$

لدينا حركة دائرية لذلك: $V = R\omega = R\frac{d\theta}{dt}$ ، نضرب (2) في $\frac{d\theta}{dt}$ ثم نعوض بـ V فنجد:

$$mg\sin\theta.\frac{d\theta}{dt} = m\frac{dV}{dt}.\frac{V}{R}$$ نجد في الأخير

$$\int_0^\theta mg.\sin\theta\, d\theta = \int_0^V \frac{m}{R} V\, dV$$

$$\Leftarrow \quad mg\left[1-\cos\theta\right] = \frac{1}{2}\frac{m}{R}V^2$$ نعوض في (1)

$$\Leftarrow \quad \boxed{N = mg\cos\theta - \frac{m}{R}V^2 = mg\left[3\cos\theta - 2\right]}$$

2) - يغادر الجسم سطح الكرة عندما تصبح $N=0$ فنجد:

$$\boxed{\cos\theta_0 = \frac{2}{3}} \Leftarrow 3\cos\theta_0 = 2$$

2

- التمرين 03 :

1) حساب التسارع :

$$\boxed{\begin{cases} \gamma_x = \frac{a}{m} \sin\omega t \\ \gamma_y = \frac{b}{m} \cos\omega t \end{cases}}$$

2) حساب السرعة : بالتكامل :

$$\begin{cases} V_x = \frac{-a}{m\omega} \cos\omega t + V_{x_0} \\ V_y = \frac{b}{m\omega} \sin\omega t + V_{y_0} \end{cases} \quad \text{à } t=0 \quad \begin{cases} V_x(0) = -\frac{a}{m\omega} \Rightarrow V_{x_0} = 0 \\ V_y(0) = 0 \Rightarrow V_{y_0} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} V_x = -\frac{a}{m\omega} \cos\omega t \\ V_y = \frac{b}{m\omega} \sin\omega t \end{cases}}$$

3) حساب الفاصلة : بالتكامل :

$$\begin{cases} x = -\frac{a}{m\omega^2} \sin\omega t + x_0 \\ y = -\frac{b}{m\omega^2} \cos\omega t + y_0 \end{cases} \quad \text{à } t=0 \quad \begin{cases} x(0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \\ y(0) = \frac{-b}{m\omega^2} \Rightarrow y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -\frac{a}{m\omega^2} \sin\omega t \\ y = -\frac{b}{m\omega^2} \cos\omega t \end{cases}}$$

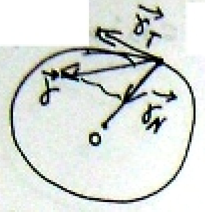
وتكون معادلة المسار هي :

$$\boxed{\frac{x^2}{\left(\frac{-a}{m\omega^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{-b}{m\omega^2}\right)^2} = 1}$$

قطع ناقص

3

- التمرين 04 : - الحركة ذات تسارع مركزي وفي هذه الحالة



المركز هو مركز الدائرة :

$\vec{\gamma}_N$ متجه دائما نحو المركز "O"

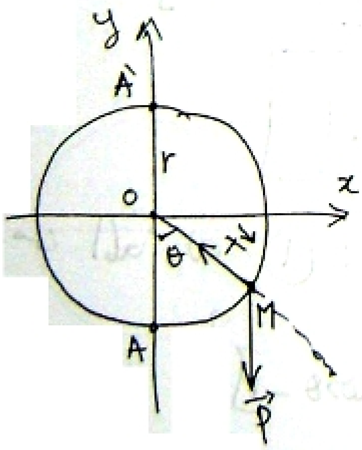
$\vec{\gamma}_T$ مماسي للمسار لذلك $\vec{\gamma}$ غير موجه نحو "O" وبالتالي في حالة

$\vec{\gamma}_T \neq \vec{0}$ نلاحظ أن $\vec{\gamma}$ غير موجه نحو "O" والنتيجة هي

الحركة ذات تسارع مركزي $\Leftrightarrow \vec{\gamma}_T = \vec{0}$

أي الحركة دائرية منتظمة

- التمرين 06 : - نستعمل نفس الطريقة في التمرين (02) :



1) - لدينا دائما : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{\gamma}$

نأخذ الإحداثيات الذاتية $(\vec{U}_N, \vec{U}_T)$

بالإسقاط :

$$\begin{cases} T - mg\cos\theta = m\gamma_N = m\frac{V^2}{r} & (1) \\ -mg\sin\theta = m\gamma_T = m\frac{dV}{dt} & (2) \end{cases}$$

في النقطة (A) : $\theta = 0$ المعادلة (1) تصبح $T_A - mg = \frac{m}{r}V_A^2$

$$\boxed{T_A = mg + \frac{m}{r}V_A^2}$$

في النقطة (A') : $\theta = \pi$ المعادلة (1) تصبح $T_{A'} + mg = \frac{m}{r}V_{A'}^2$

$$\boxed{T_{A'} = -mg + \frac{m}{r}V_{A'}^2}$$

(4)

2- نأخذ المعادلة (2) : $-mg\sin\theta = m\gamma_T = m\frac{dV}{dt}$

نضرب المعادلة د $\frac{d\theta}{dt}$ مع : $V = r\frac{d\theta}{dt}$

⇐ $-mg\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{dt} = m\cdot\frac{dV}{dt}\cdot\frac{V}{r}$

ونحصل على المعادلة التفاضلية :

$$\boxed{-g\sin\theta\, d\theta = \frac{1}{r}V\, dV}$$

بالتكامل :

$$\left[g\cos\theta\right]_0^\theta = \left[\frac{1}{2}\frac{V^2}{r}\right]_{V_0}^{V}$$

$$\Rightarrow \quad g\left[\cos\theta - 1\right] = \frac{1}{2r}\left[V^2 - V_0^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V^2 = V_0^2 + 2gr\left[\cos\theta - 1\right]}$$

ومن المعادلة (1) : $T = mg\cos\theta + m\frac{V^2}{r}$

$$T = mg\cos\theta + \frac{m}{r}\left\{V_0^2 + 2gr\left[\cos\theta - 1\right]\right\}$$

$$\boxed{T = m\frac{V_0^2}{r} + gm\left[3\cos\theta - 2\right]}$$

3- $V=0 \Rightarrow \cos\theta_V = 1 - \frac{V_0^2}{2gr}$

$T=0 \Rightarrow \cos\theta_T = \frac{2}{3} - \frac{V_0^2}{3gr}$

5

التمرين 05:- الحركة ذات تسارع مركزي لذلك لدينا قانون ثابت المساحات C ؛ $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} C$

المساحات : (سرعة المسح) :

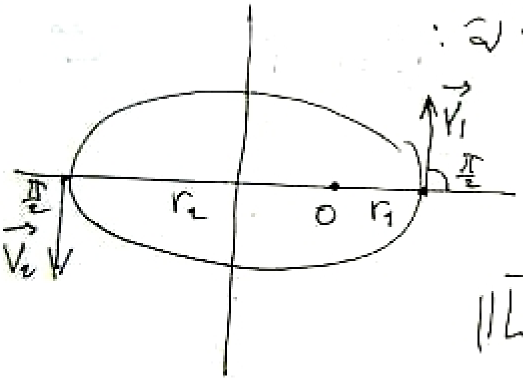
$$V_s = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\|\vec{L}\|}{m} \Leftarrow C = \frac{\|\vec{L}\|}{m}$$

$\vec{L}$ هو العزم الحركي :

$$\vec{L} = m(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}) \Leftarrow \vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$$ مع

عند النقطة M_0 : $\|\vec{L}_0\| = m \|\overrightarrow{OM_0}\| . \|\vec{V}_0\| . \sin\alpha = ct$

العزم الحركي ثابت في هذه الحالة :



عند M_1 (r_1) و M_2 (r_2)

الزاوية $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ومنه

$$\|\vec{L}_1\| = m\, r_1 . V_1$$

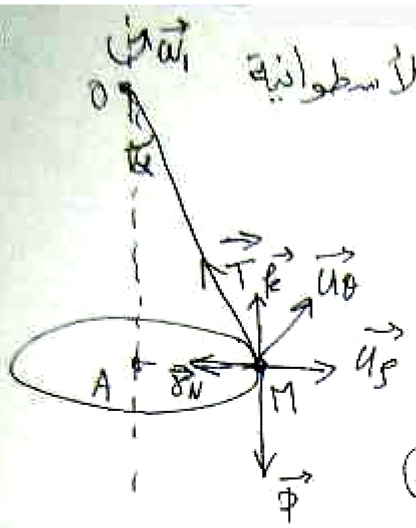
$$\|\vec{L}_2\| = m\, r_2 . V_2$$

$$\|\vec{L}_0\| = \|\vec{L}_1\| = \|\vec{L}_2\|.$$

فنجد :

$$\boxed{\begin{aligned} V_1 &= \frac{\|\vec{L}_0\|}{m r_1} = \frac{\|\overrightarrow{OM_0}\| . \|\vec{V}_0\|}{r_1} \sin\alpha \\ V_2 &= \frac{\|\vec{L}_0\|}{m r_2} = \frac{\|\overrightarrow{OM_0}\| . \|\vec{V}_0\|}{r_2} \sin\alpha \end{aligned}}$$

(6)



1- التمرين 07 : نستعمل الإحداثيات الأسطوانية

1) - الحركة دائرية منتظمة مركزها "A"

قانون التحريك نكتب : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{\gamma}_M$

بالإسقاط على $\vec{u}_\rho$ و $\vec{k}$ نجد :

① $* -T\sin\alpha = -m\gamma_M$ و ② $* T\cos\alpha - P = 0$

مع $\gamma_N = \frac{V^2}{r} = r\omega_1^2$ و $r = L\sin\alpha \Leftarrow \|\vec{\gamma}_N\| = L\sin\alpha\,\omega_1^2$

بالتعويض نجد : $\boxed{\cos\alpha = \frac{g}{L\omega_1^2}}$ و $\boxed{T = mL\omega_1^2}$

2)- $\cos\alpha \leqslant 1$ ومنه $\frac{g}{L\omega_1^2} \leqslant 1$ أو $\boxed{\omega_1 \geqslant \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}}$

3)- لدينا : $\vec{OM} = L\sin\alpha\,\vec{u}_\rho - L\cos\alpha\,\vec{k} \Leftarrow \boxed{\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = L\sin\alpha\,\omega_1\vec{u}_\theta}$

والعزم الحركي :

$\vec{L} = \vec{OM}\wedge\vec{P} = m\left(L\sin\alpha\,\vec{u}_\rho - L\cos\alpha\,\vec{k}\right)\wedge\vec{V}$

$\boxed{\vec{L} = L^2\omega_1 m\left(\sin^2\alpha\,\vec{k} - \sin\alpha\cos\alpha\,\vec{u}_\rho\right)}$ و $\frac{d\vec{L}}{dt} = L^2\omega_1\left(-\sin\alpha\cos\alpha.\omega_1\vec{u}_\theta\right).m$

$\Leftarrow \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = -mL^2\omega_1^2\sin\alpha\cos\alpha\,\vec{u}_\theta}$

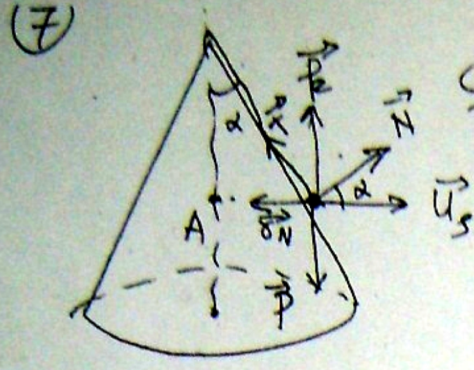
وعزم القوى هو فقط ناتج عن الثقل لأن $\vec{T} \,//\, \vec{OM}$

$\vec{\mathcal{M}}_p = \vec{OM}\wedge\vec{P} = \left(L\sin\alpha\,\vec{u}_\rho - L\cos\alpha\,\vec{k}\right)\wedge\left(-mg\,\vec{k}\right)$

$\vec{\mathcal{M}}_p = +L\sin\alpha\, mg\,\vec{u}_\theta$ ومع $\cos\alpha = \frac{g}{L\omega_1^2}$

$\Leftarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = -mL^2\omega_1^2\sin\alpha.\frac{g}{L\omega_1^2}\,\vec{u}_\theta = -L\sin\alpha\, mg\,\vec{u}_\theta$ وهي نفس القيمة

(7)



4)- رد الفعل عمودي على السطح الجانبي لأن الإحتكاك معدوم

بالإسقاط على $\vec{U}_\rho$ و $\vec{k}$ نجد :

$$\vec{T}+\vec{N}+\vec{P}=m\vec{\gamma}_N$$

$-\vec{U}_\rho$: (1) $-T\sin\alpha + N\cos\alpha = m\gamma_N$ مع

$-\vec{k}$: (2) $T\cos\alpha + N\sin\alpha - P = 0$

$\gamma_N = L\sin\alpha\,\omega_2^2$

$\alpha = ct$

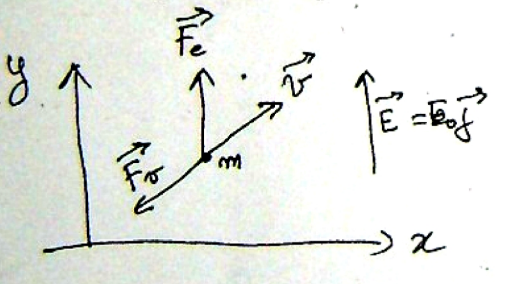
بالإستخراج T من (1) وتعويضها في (2) نجد N :

$$\boxed{N = \frac{1}{2}m\,\frac{g - L\omega_2^2\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

نلاحظ أن N=0 عندما يكون $\omega_2 \geq \sqrt{\frac{g}{L\cos\alpha}}$ أي $\omega_1=\sqrt{\frac{g}{L\cos\alpha}}$

يصبح الجسم لا يلامس المخروط ونحصل على الحركة السابقة

- التمرين 09 :-



1) - القوى المؤثرة هي القوة الكهربائية : $\vec{F_e}=q\vec{E}$

وقوة المقاومة اللزجة : $\vec{F_v}=-K\vec{v}$ وقانون نيوتن يكتب :

$$\vec{F_e}+\vec{F_v}=m\vec{\gamma}$$

$\Leftarrow$ $\boxed{q\vec{E}-K\vec{v}=m\vec{\gamma}}$ بالإسقاط على المحورين :

2)-

OX : $-Kv_x = m\gamma_x \Leftarrow$ (1) $\frac{dv_x}{dt}+\frac{K}{m}v_x=0$

OY : $qE_0 - Kv_y = m\gamma_y \Leftarrow$ (2) $\frac{dv_y}{dt}+\frac{K}{m}v_y=\frac{q}{m}E_0$

(8)

معادلتان تفاضليتان من الدرجة الأولى

حسب Ox : $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{K}{m} v_x \Leftarrow \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{K}{m} dt$

بالتكامل نحصل: $\ln v_x = -\frac{K}{m} t + C \Leftarrow \boxed{v_x = v_{x_0} e^{-\frac{K}{m}t}}$

حسب Oy : - نبحث على الحل الخاص للمعادلة :

نضع $v_{y_1} = cte \Leftarrow \frac{K}{m} v_{y_1} = \frac{q}{m} E_0 \Leftarrow \boxed{v_{y_1} = \frac{q}{K} E_0}$

- نبحث على الحل العام بدون طرف ثاني :

$\frac{dv_{y_2}}{dt} = -\frac{K}{m} v_{y_2} \Leftarrow \frac{dv_{y_2}}{v_{y_2}} = -\frac{K}{m} dt$ بالتكامل نحصل:

$\ln v_{y_2} = -\frac{K}{m} t + C' \Leftarrow v_{y_2} = b \cdot e^{-\frac{K}{m}t}$

والحل العام للمعادلة هو: $\boxed{v_y = v_{y_1} + v_{y_2} = \frac{q}{K} E_0 + b\, e^{-\frac{K}{m}t}}$

- تحديد الثابتين v_{x_0} و b من الشروط الابتدائية

$t=0$: $\vec{v}(0) = V_0(\cos\alpha\, \vec{i} + \sin\alpha\, \vec{j}) \Leftarrow$
$$\begin{cases} v_x(0) = v_{x_0} = V_0 \cos\alpha \\ v_y(0) = \frac{q}{K} E_0 + b = V_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$b = V_0 \sin\alpha - \frac{q}{K} E_0 \Leftarrow$

لنجد في الأخير

$$\vec{V} = \begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha\, e^{-\frac{K}{m}t} \\ V_y = \frac{q}{K} E_0 + \left(V_0 \sin\alpha - \frac{q}{K} E_0\right) e^{-\frac{K}{m}t} \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} \beta = \frac{K}{m} \ , \ a = V_0 \cos\alpha \\ c = \frac{q}{K} E_0 \ , \ b = V_0 \sin\alpha - \frac{q}{K} E_0 \end{cases}$$

-3 ⑨

$$\boxed{x=-\frac{m}{K}V_0\cos\alpha\, e^{-\frac{K}{m}t}+C_x} \Leftarrow x=\int v_x\,dt$$

$$\boxed{y=-\frac{m}{K}\left(V_0\sin\alpha-\frac{q}{K}E_0\right)e^{-\frac{K}{m}t}+\frac{q}{K}E_0 t+C_y} \Leftarrow y=\int v_y\,dt$$

تحديد C_x و C_y :-

$t=0$

$$\boxed{C_x=\frac{m}{K}V_0\cos\alpha} \Leftarrow x(0)=0$$

$$\boxed{C_y=\frac{m}{K}\left(V_0\sin\alpha-\frac{q}{K}E_0\right)} \Leftarrow y(0)=0$$

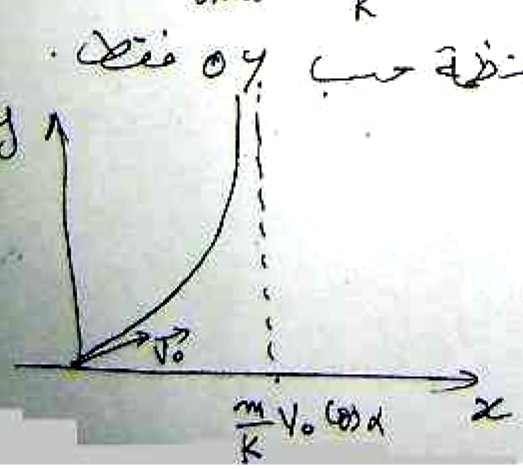
ونجد في الأخير:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t)&=\frac{m}{K}V_0\cos\alpha\left[1-e^{-\frac{K}{m}t}\right]\\ y(t)&=\frac{m}{K}\left(V_0\sin\alpha-\frac{q}{K}E_0\right)\left[1-e^{-\frac{K}{m}t}\right]+\frac{q}{K}E_0 t\end{aligned}}$$

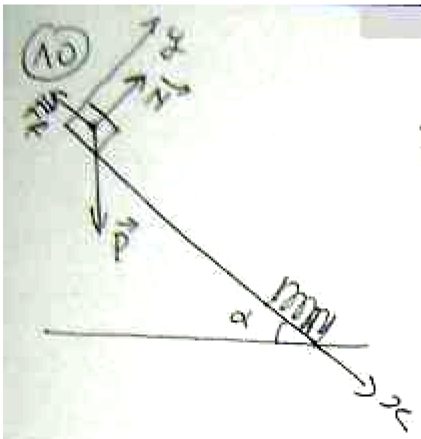
عندما $t\to\infty \Leftarrow$

$$\left.\begin{aligned} x_{lim}&=\frac{m}{K}V_0\cos\alpha\\ y_{lim}&=\frac{q}{K}E_0 t+\frac{m}{K}\left(V_0\sin\alpha-\frac{q}{K}E_0\right)\end{aligned}\right\}$$

تصبح الحركة مستقيمة منتظمة حسب oy فقط.



(15)



التمرين 11 :- 1) القوى المؤثرة هي

الثقل $\vec{P}$ ، رد الفعل الناظمي $\vec{N}$ والإحتكاك $\vec{F_f}$

عند السكون : $\vec{P}+\vec{N}+\vec{F_f}=\vec{0}$

Ox : $F_f = mg\sin\alpha \Leftarrow mg\sin\alpha - F_f = 0$

Oy : $N = mg\cos\alpha \Leftarrow -mg\cos\alpha + N = 0$

بالقسمة : $\alpha_{min} = 5{,}71° \Leftarrow f = \tan\alpha_{min} \Leftarrow \alpha \leq \alpha_m \Leftarrow f = \frac{F_f}{N} = \tan\alpha$

2)- $\alpha = 30°$: أ- $\vec{P}+\vec{N}+\vec{F_f}=m\vec{\gamma}$ بالإسقاط

Ox : $P\sin\alpha - F_f = m\gamma_x$ (1) و Oy : $N - P\cos\alpha = 0$ (2)

بالإستعمال (1) و (2) و $f=\frac{F_f}{N}$ $\Leftarrow$ $\boxed{\gamma_x = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}$

ب- نستعمل العلاقة $V^2 - V_0^2 = 2\gamma_x \Delta x$ مع $V_0 = 0$ فنجد

$\boxed{V = 9{,}09\,m/s} \Leftarrow V = \sqrt{2g(\sin\alpha - f\cos\alpha).D}$

ت- نضيف قوة النابض ونستعمل العلاقة العامة $\boxed{VdV = \gamma_x\, dx}$

نكتب قانون نيوتن : $\boxed{P\sin\alpha - F_f - K\Delta x = m\gamma_x}$ لنجد γ_x :

$\boxed{\gamma_x = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{K}{m}\Delta x}$ بالتعويض والتكامل مع $V_f = 0$ و Δx_{max}

$$\frac{1}{2}\left(\underbrace{V_f^2}_{0} - V^2\right) = \int_0^{\Delta x_{max}} \left[g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{K}{m}\Delta x\right] d(\Delta x)$$

لنحصل على المعادلة :

$$\boxed{(\Delta x_{max})^2 - \frac{2gm}{K}(\sin\alpha - f\cos\alpha)\Delta x_{max} - \frac{m}{K}V^2 = 0}$$

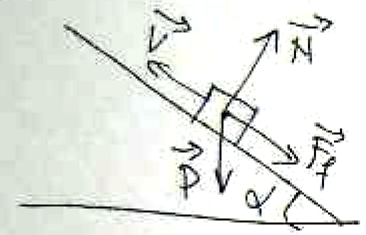
ونجد الحل الوحيد :

$$\Delta x_{max} = \frac{gm}{K}(\sin\alpha - f\cos\alpha) + \sqrt{\frac{g^2m^2}{K^2}(\sin\alpha - f\cos\alpha)^2 + \frac{m}{K}V^2}$$

(11)

نجد أن : $\boxed{\Delta x_{max} = 2{,}25\ m}$

ت : عند أقصى تقلص للنابض ، يتمدد من جديد ليدفع الكتلة نحو الأعلى ، يمكن أن نفترض أن الكتلة تعود إلى نفس السرعة الأولى عند إسترخاء النابض . وتنطلق الكتلة بسرعة V نحو الأعلى الإحتكاك يغير إتجاهه ونجد التسارع



$$\boxed{\gamma'_x = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}$$

نعيد تطبيق القانون السابق مع $V'_f = 0$

نجد في الأخير : $\Leftarrow \left(V_f'^2 - V^2\right) = 2\gamma'_x D$

$$\boxed{D' = \frac{-V^2}{2\gamma'_x} = \left(\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\sin\alpha + f\cos\alpha}\right) D}$$

$$\boxed{D' = 7{,}047\ m}$$